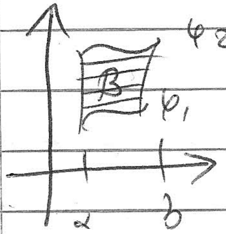
05/04/16.

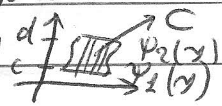
<<Σκονάκι>> (Συνέχεια)

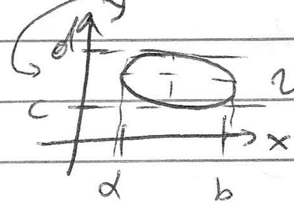
(5) $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x\in[\alpha,b] \wedge \varphi_1(x)\le y\le \varphi_2(x)\}$ $\varphi_1,\varphi_2:[\alpha,b]\to\mathbb{R}$ συνεχείς, $f:B\to\mathbb{R}$ συνεχής $\Rightarrow \int_B f(x,y)\,d(x,y)=\int_\alpha^b\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$



Αντίστοιχα για κανονικό χωρίο ως προς y ⇒

⇒ Αν B κανονικό χωρίο ως προς $x'x$, $y'y$





τότε $\int_B f(x,y)\,d(x,y) = \int_\alpha^b\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx =$

$= \int_\alpha^b\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$]

⟸

Αυτό γενικεύεται και έχουμε: Αν $M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: (x,y)\in B \wedge \chi_1(x,y)\le z\le \chi_2(x,y)\}$ όπου $B\subset\mathbb{R}^2$ J-μετρ., συμπαγές και $\chi_1,\chi_2: B\to\mathbb{R}$, $\chi_1\le\chi_2$ συνεχείς (*) τότε για $f:M\to\mathbb{R}$ συνεχή ισχύει

$$\int_M f(x,y,z)\,d(x,y,z)=\int_B\int_{\chi_1(x,y)}^{\chi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,d(x,y)$$

(*) Ένα τέτοιο $M\subset\mathbb{R}^3$ λέγεται κανονικό χωρίο ως προς το επίπεδο xy.

Για $f: M \to \mathbb{R}$ με $f(x,y,z)=1$ ($\Leftrightarrow f\equiv 1$) ο προηγούμενος τύπος δίνει το περιεχόμενο (εδώ κυριολεκτικά) του M:

$$: v(M)=\int_M 1\, d(x,y,z) = \int_B \int_{x_1(x,y)}^{x_2(x,y)} 1\, dz\, d(x,y)$$

π.χ. για την μπάλα $M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2\le r^2\} =$
$= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x,y)\in D : -\sqrt{r^2-y^2-x^2}\le z\le\sqrt{r^2-x^2-y^2}\}$
μ $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le r^2\}$ έχουμε:

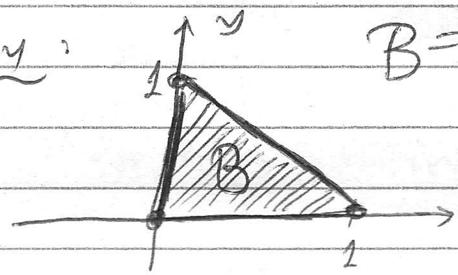
$$v(M)=\int_D\int_{-\sqrt{r^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-x^2-y^2}} 1\,dz\,d(x,y) =$$

$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[-r,r] \wedge -\sqrt{r^2-x^2}\le y\le\sqrt{r^2-x^2}\}$

$$= \int_{-r}^{r}\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}}\int_{-\sqrt{r^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-x^2-y^2}} 1\,dz\,dy\,dx$$

A.127 (β) Υπολογίστε το ολοκλ. $\int_B \underbrace{(x+y^2)}_{f(x,y)\text{ συνεχής}} d(x,y)$ όπου B το τρίγωνο με γωνίες $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$.

Λύση:



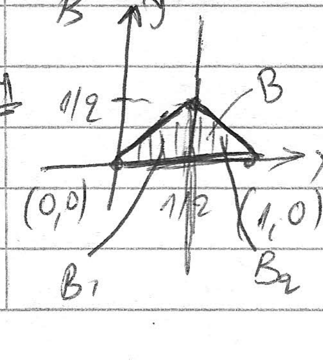
$B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[0,1] \wedge 0\le y\le 1-x\}$

$y(x)=\alpha+\beta x$
$y(x)=1-x$

Άρα $\int_B (x+y^2)d(x,y) = \int_0^1\int_0^{1-x}(x+y^2)\,dy\,dx = \dots = \frac{1}{4}$

(γ) $\int_B (x^2+y^2)d(x,y)$, B: το τρίγωνο με γωνίες τις $(0,0)$, $(1,0)$, $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

Λύση



$B=\underbrace{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[0,\tfrac{1}{2}] \wedge 0\le y\le x\}}_{=B_1} \cup$

$\cup \underbrace{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[\tfrac{1}{2},1] \wedge 0\le y\le 1-x\}}_{=B_2}$

άρα $\int_B (x^2+y^2)d(x,y) \overset{(1)}{=} \int_{B_1}(x^2+y^2)d(x,y) + \int_{B_2}(x^2+y^2)d(x,y) =$

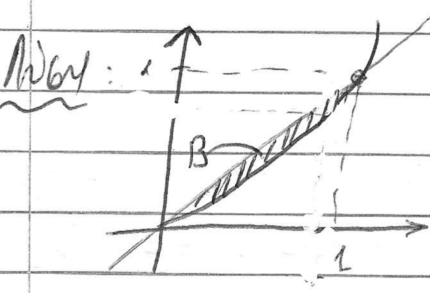
(5) $\int_0^{1/2}\int_0^{x}(x^2+y^2)\,dy\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_0^{1-x}(x^2+y^2)\,dy\,dx = \dots = \frac{1}{12}$.

$$\int_B \underbrace{(x^2+y^2)}_{\int_0^{x^2+y^2} 1\,dz}\,d(x,y) = \int_B \int_0^{x^2+y^2} 1\,dz\,d(x,y) = \int_M 1\,d(x,y,z) = v(M)$$

όπου $M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x,y)\in B : 0\le z\le x^2+y^2\}$.

(δ) Υπολ. το $\int_B xy\,d(x,y)$, όπου B το χωρίο στο 1ο τεταρτημόριο μεταξύ της ευθείας $y=x$ και της παραβολής $y=x^2$.

Λύση:

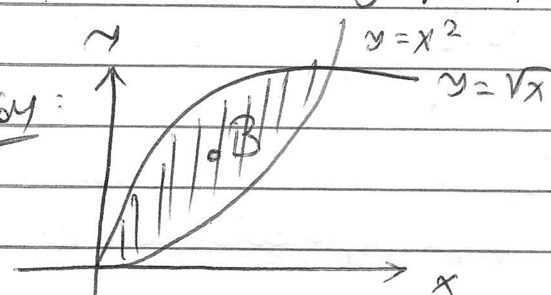


$B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[0,1] \wedge x^2\le y\le x\}$

$$\int_B xy\,d(x,y) = \int_0^1\int_{x^2}^{x} xy\,dy\,dx = \dots = \frac{1}{24}$$

(ε) $\int_B \sqrt{x}\,y\,d(x,y)$, B: το χωρίο στο 1ο τεταρτημόριο μεταξύ των $y=\sqrt{x}$ και $y=x^2$

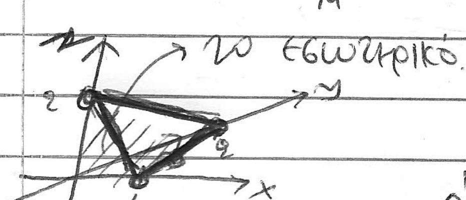
Λύση:



$$\int_B \sqrt{x}\,y\,d(x,y) = \int_0^1\int_{x^2}^{\sqrt{x}} \sqrt{x}\,y\,dy\,dx = \frac{6}{55}$$

(A.128) Υπολ. τον όγκο του τετραέδρου που περικλείεται από τα τρία επίπεδα συντεταγμένων και το επίπεδο $z=2-2x-y$.

Λύση: $v(M)=\int_M 1\,d(x,y,z)$



Για • $z=0 \Rightarrow y=2-2x$

• $y=0 \Rightarrow x=1$

όπου $M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x,y)\in B \wedge 0\le z\le 2-2x-y\}$

$B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[0,1] \wedge 0\le y\le 2-2x\}$

$\longrightarrow$

και M: κανονικό χωρίο ως προς το επίπεδο xy

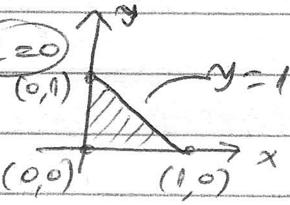
B —//— —//— του άξονα x.

Άρα $v(M)=\int_B \int_0^{2-2x-y} 1\,dz\, d(x,y) = \int_0^1 \int_0^{2-2x} \int_0^{2-2x-y} 1\,dz\,dy\,dx = \frac{2}{3}$

A.129 Υπολ. τον όγκο του σώματος που περικλείεται από το υπερβολικό παραβολοειδές $z=xy$, το τρίγωνο με γωνίες $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ και το επίπεδο $x+y=1$.

Λύση: $v(M)=\int_M 1 = \int_M 1\, d(x,y,z)$

όπου $z=0$



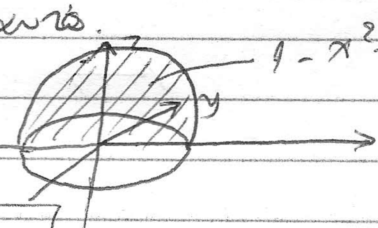
$y=1-x \Leftrightarrow x+y=1$, όπου $M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x,y)\in B \wedge 0\le z\le xy\}$

και $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[0,1] \wedge y\in[0,1-x]\}$

Άρα $v(M)=\int_B\int_0^{xy} 1\,dz\,d(x,y) = \int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{xy} 1\,dz\,dy\,dx = \dots = \frac{1}{24}$.

A.131 Υπολ. τον όγκο του σώματος που περικλείεται από το επίπεδο xy και το τμήμα παραβολοειδούς $z=1-x^2-y^2$ πάνω από το επίπεδο αυτό.

Λύση: $v(M)=\int_M 1\, d(x,y,z)$



$1-x^2-y^2=f(x,y)=z$

Για $z=0 \Rightarrow \boxed{x^2+y^2=1}$

Άρα $M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x,y)\in B : 0\le z\le \underbrace{1-(x^2+y^2)}_{\text{συνεχής}}\}$

όπου $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \underbrace{x^2+y^2\le 1}_{\text{J-μετρ. κ. συμπαγές}}\}$

Άρα $v(M)=\int_M 1\,d(x,y,z) = \int_B \underbrace{\int_0^{1-(x^2+y^2)} 1\,dz}_{1-(x^2+y^2)}\,d(x,y) = \longrightarrow$

$$\left(= \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1-x^2-y^2)\, dy\, dx \right)$$

$\longmapsto$

«Σκονάκι»

⑥ (Κανόνας Αλλαγής Μεταβλητής)

<u>Θεώρημα (4.1.14)</u> "Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό, $\bar{g}: A \to \mathbb{R}^n$ 1-1 και C^1 με
<u>ή</u> $\{\det D\bar{g}(\bar{y}) > 0, \forall \bar{y} \in A\}$ <u>ή</u> $\{\det D\bar{g}(\bar{y}) < 0, \forall \bar{y} \in A\}$
Έστω $T \subset A$ J-μετρ. και συμπαγές και $f: \bar{g}(T) \to \mathbb{R}$ συνεχής $\Rightarrow$

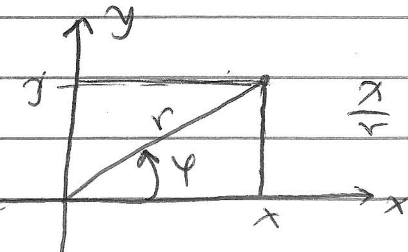
$$\Rightarrow \int_{\bar{g}(T)} f(\bar{x})\, d\bar{x} = \int_T f(\bar{g}(\bar{y}))\, |\det D\bar{g}(\bar{y})|\, d\bar{y}$$

$\longmapsto$

① Ομοπαραλληλικός Μετασχ. : $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
② Πολικές Συν/νες : $\mathbb{R}^{②} \to \mathbb{R}^{②}$
③ Σφαιρικές -//- : $\mathbb{R}^{③} \to \mathbb{R}^{③}$

② <u>Πολικές Συν/νες</u> : $\bar{g}: \underset{r}{(0, +\infty)} \times \underset{\varphi}{(0, 2\pi)} \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$

$(r, \varphi) \longmapsto g(r, \varphi) = (x, y)$



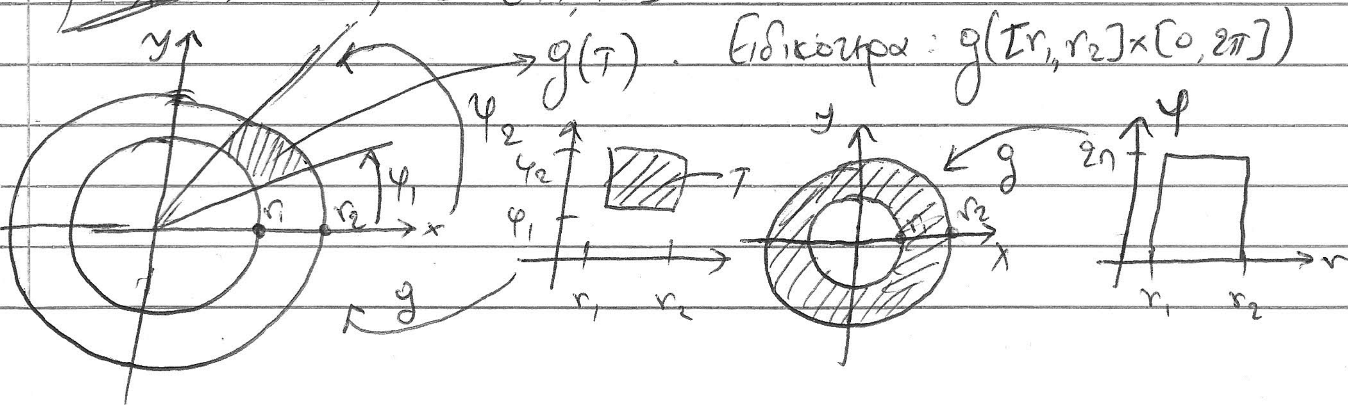
$\frac{x}{r} = \cos\varphi$

$$\Rightarrow D\bar{g}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det D\bar{g}(r, \varphi) = r > 0, \ \forall r > 0 \Rightarrow$$

$$\xrightarrow{\text{ΚΑΜ}} \int_{g(T)} f(x, y)\, d(x, y) = \int_T f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\, d(r, \varphi)$$

$\boxed{\text{π.χ.}}$ $T = [r_1, r_2] \times [\varphi_1, \varphi_2]$ $\longrightarrow g(T)$. Ειδικότερα: $g([r_1, r_2] \times [0, 2\pi])$



$T = [0, r_0] \times [0, 2\pi]$